中原名校 2021—2022 学年假期汇编试题

高一数学参考答案（四）

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	D	B	D	D	A	B	D	B	B

4. D【解析】当 $x\le1$ 时，令 $2^x-2=0$，得 $x=1$.当 $x>1$ 时，令 $1+\log_2 x=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，此时无解．综上所述，函数零点为 1.

5. B【解析】a=1，$g(x)=\frac{x^2+4}{|ax|}=\frac{x^2+4}{|x|}=|x|+\frac{4}{|x|}\geq2\sqrt{4}=4$(当且仅当$|x|=2$ 时，等号成立).

7. D【解析】参加面试的频率为$\frac{200}{400}=\frac{1}{2}$，样本中[75，90]的频率为$\frac{6+5+1}{24}=\frac{1}{2}$，由样本估计总体知，分数线大约为 75 分.

10. D【解析】∵$f(1)=\ln 2-2<0$，$f(2)=\ln 3-1>0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$内单调递增，且其图象是一条连续的曲线，∴函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是(1，2).故选 D.

二、填空题

13. 【参考答案】(1)，(2)

14. 【参考答案】116.67

【解析】由频率分布直方图可知，分数在 120 分以下的学生所占的比例为(0.01+0.015+0.015+0.03)×10×100%=70%，

分数在 110 分以下的学生所占的比例为(0.01+0.015+0.015)×10×100%=40%，

因此，60%分位数一定位于[110，120)内，

因为$110+\frac{0.60-0.40}{0.70-0.40}\times10\approx116.67$

所以此班的模拟考试成绩的 60%分位数约为 116.67 分.

15. 【参考答案】$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

16. 【参考答案】$\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right]\cup[3,+\infty)$

三、解答题

17.

解:（1）$\sqrt[3]{(-8)^3}-\left(\frac{1}{2}\right)^0+0.25^{\frac{1}{2}}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}+2^3\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^6=-8-1+\frac{1}{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^4+1=-6$

……………………………5 分

(2) $\log_3\sqrt{27}+\lg 25+2\lg 2-3^{\log_3 2}+\log_3 4\cdot\log_2\sqrt[3]{3}$

$=\log_3 3^{\frac{3}{2}}+\lg 25+\lg 4-3^{\log_3 2}+\dfrac{2\lg 2}{\lg 3}\cdot\dfrac{\lg\sqrt[3]{3}}{\lg 2}$

$=\dfrac{3}{2}+2-2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{6}$

……………………………10 分

18.

解：（1）由 $x^2-4x-12\le 0$ 得 $-2\le x\le 6$，故集合 $A=\{x\,|-2\le x\le 6\}$， ………… 3 分

由 $x^2-2x+1-m^2=0$ 得 $x_1=1-m,x_2=1+m$，

因为 $m>0$，故集合 $B=\{x\,|\,1-m\le x\le 1+m\}$； ……………………………6 分

（2） $x\in A$ 是 $x\in B$ 成立的充分不必要条件，集合 A 是集合 B 的真子集，…… 8 分

则有 $\begin{cases}1-m\le -2\\1+m\ge 6\end{cases}$，解得 $m\ge 5$，

所以，实数 m 的取值范围是 $[5,+\infty)$ ……………………………… 12 分

19.

解：（1）利用利润等于收入减去成本，可得

当 $0<x\leqslant 40$ 时，$W=xR(x)-(16x+40)=-6x^2+384x-40$； ………… 2 分

当 $x>40$ 时，$W=xR(x)-(16x+40)=-\dfrac{40000}{x}-16x+7360$ ………… 4 分

$\therefore W=\begin{cases}-6x^2+384x-40,0<x\leqslant 40\\-\dfrac{40000}{x}-16x+7360,x>40\end{cases}$； …………5 分

（2）当 $0<x\leqslant 40$ 时，$W=-6x^2+384x-40=-6(x-32)^2+6104$，

$\therefore x=32$ 时，$W_{max}=W(32)=6104$； …………7 分

当 $x>40$ 时，$W=-\dfrac{40000}{x}-16x+7360\leqslant -2\sqrt{\dfrac{40000}{x}\cdot 16x}+7360$， …………9 分

当且仅当 $\dfrac{40000}{x}=16x$，即 $x=50$ 时，$W_{max}=W(50)=5760$ ………… 10 分

$\because 6104>5760$

$\therefore$ 当 x=32 时，W 的最大值是 6104 万元. …………12 分

20.

解：

设甲班40名同学的成绩为$a_1,a_2,\cdots a_{40}$;乙班50名同学的成绩为$b_1,b_2,\cdots b_{50}$.

则甲乙两班的平均成绩、权重和方差分别为

$$\overline{x_{甲}}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{40}}{40}=80.5，\omega_{甲}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}，S_{甲}^2=\frac{\left(a_1-\overline{x_{甲}}\right)^2+\left(a_2-\overline{x_{甲}}\right)^2+\cdots+\left(a_{40}-\overline{x_{甲}}\right)^2}{40}=500$$

$$\overline{x_{乙}}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{50}}{50}=85，\omega_{乙}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}，S_{乙}^2=\frac{\left(b_1-\overline{x_{乙}}\right)^2+\left(b_2-\overline{x_{乙}}\right)^2+\cdots+\left(a_{50}-\overline{x_{乙}}\right)^2}{40}=360$$

…………3 分

全体90名同学的平均成绩$\overline{x}=\omega_{甲}\overline{x_{甲}}+\omega_{乙}\overline{x_{乙}}=\frac{4}{9}\times 80.5+\frac{5}{9}\times 85=83$（分）

…………7 分

$$方差S^2=\omega_{甲}\left[S_{甲}^2+\left(\overline{x_{甲}}-\overline{x}\right)^2\right]+\omega_{乙}\left[S_{乙}^2+\left(\overline{x_{乙}}-\overline{x}\right)^2\right]$$

$$=\frac{4}{9}\left[500+(80.5-83)^2\right]+\frac{5}{9}\left[360+(85-83)^2\right]$$

$$\approx 427.22$$

…………11 分

答：甲乙两个班 90 名同学的平均成绩为 83 分，方差约为 427.22 …………12 分

21.

解：（1） 函数$f(x)=ba^x$的图像过$A(2,12),B(4,48)$

$\therefore\ ba^2=12$

$ba^4=48$

$\therefore a=2,b=3$

$\therefore f(x)=3\times 2^x$

…………3 分

（2） $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x+\left(\frac{1}{b}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为 R 的减函数.

任取实数 $x_1<x_2$, 则

$$g(x_1)-g(x_2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

$\because y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 和$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 均为R上的减函数

$\therefore x_1<x_2$时$\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}>0,\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}>0$

$\therefore g(x_1)-g(x_2)>0$

$\therefore g(x_1)>g(x_2)$

$\therefore$函数$g(x)$为R上的减函数

…………7 分

（3）

方程$m-\left|\left(\frac{1}{a}\right)^{x}+\left(\frac{1}{b}\right)^{x}-\frac{a}{b}\right|=0$即$m=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}\right|$在$[0,+\infty)$内的解的个数

也就是直线$y=m$和函数$y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}\right|$图像在在$[0,+\infty)$内交点个数

函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}$图像和$y$轴交于$\left(0,\frac{4}{3}\right)$，并且当$x$无限增大时$y$逐渐减少并无限接近于直线$y=-\frac{2}{3}$

$\therefore$函数$y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}\right|$和$y$轴交于$\left(0,\frac{4}{3}\right)$，并且当$x$无限增大时无限接近于直线$y=\frac{2}{3}$

当$m<0$时$m=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}\right|$在$[0,+\infty)$内无解

当$m=0$或$\frac{2}{3}\le m\le\frac{4}{3}$时$m=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}\right|$在$[0,+\infty)$内有一个解

当$0<m<\frac{2}{3}$时$m=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}\right|$在$[0,+\infty)$内有两个不同的解

当$m>\frac{4}{3}$时$m=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{2}{3}\right|$在$[0,+\infty)$内无解

…………… 12 分

22.

解：（1）$\because$函数 $f(x)=\dfrac{(a-2)x^2+x+b+1}{1+x^2}$ 为定义在 R 上的奇函数，

$\therefore f(0)=0$,即$b=-1$,又$\because f(-1)=-f(1)$得$a=2$

$\therefore f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

…………4 分

（2）证明：设$x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

则$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}-\dfrac{x_2}{1+x_2^2}$， $=\dfrac{x_1\left(1+x_2^2\right)-x_2\left(1+x_1^2\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}=\dfrac{\left(x_1-x_2\right)\left(1-x_1x_2\right)}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)}$，

$\because x_1-x_2<0$，$1+x_1^2>0$，$1+x_2^2>0$，$1-x_1x_2<0$，

$\therefore f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>0$，

$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减. ……8 分

（3）由$f\left(1+3x^2\right)+f\left(2x-x^2-5\right)>0$，

得$f\left(1+3x^2\right)>-f\left(2x-x^2-5\right)$.

$\because f(x)$是奇函数，

$\therefore f\left(1+3x^2\right)>f\left(x^2-2x+5\right)$. （9 分）

又$\because 1+3x^2\geq 1$，$x^2-2x+5=(x-1)^2+4>1$，且$f(x)$在$[1,+\infty)$是减函数.

$\therefore 1+3x^2<x^2-2x+5$，即$2x^2+2x-4<0$，解得$-2<x<1$， ……11 分

$\therefore$不等式$f\left(1+3x^2\right)+f\left(2x-x^2-5\right)>0$的解集是$\{x\,|\,-2<x<1\}$. ……12 分